بهبود تنش و برآورد خطا با استفاده از تعادل در هر ناحیه از تحلیل ایزوژئومتریک*

احمد گنجعلی[۱] بهروز حسنی[۲]

چکیده اولین روش برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش در روش ایزوژئومتریک، بر پایهٔ استفاده از خاصیت نقاط فوق‌همگرای گوسی بوده است. در این مقاله به بررسی روش برآورد خطای دیگری مبتنی بر ارضای معادلات تعادل در حل دو مثال الاستیسیته و هم‌چنین تأثیر تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوسی در کارایی این برآوردکنندهٔ خطا پرداخته می‌شود. در این روش با استفاده از ارضای معادلات تعادل در هر ناحیه از فضای محاسباتی تحلیل ایزوژومتریک یک سطح تنش بهبود یافته به‌دست می‌آید که نشان داده خواهد شد این سطح تنش نسبت به سطح تنش ایزوژئومتریک و سطح تنش بهبود یافته مبتنی بر نقاط فوق‌همگرا دارای دقت بیشتری خواهد بود. برای بررسی کارایی این برآورد کنندهٔ خطا به مدل‌سازی و تحلیل دو مسألهٔ الاستیسیته دارای حل تحلیلی و مقایسهٔ نتایج به‌دست آمده از این روش با روش مبتنی بر نقاط فوق‌همگرا و نتایج دقیق پرداخته شده است. نتایج نشان‌دهندهٔ کارایی بهتر این روش نسبت به روش بازیافت تنش بر پایهٔ استفاده از خاصیت نقاط فوق‌همگرا است و بر این اساس می‌توان از این روش نیز به‌عنوان یک روش ساده و مؤثر دیگر برای بازیافت تنش و برآورد خطا در روش ایزوژئومتریک نام برد.

واژه‌های کلیدی تحلیل ایزوژئومتریک، برآورد خطا، بازیافت تنش، معادلات تعادل.

Improvement of Stress and Error Estimation by Patch Equilibrium in Isogeometric Analysis

A. Ganjali B. Hassani

Abstract A method for error estimation of isogeometric analysis of plane stress problems, based on stress recovery by using the super convergent properties of the Gauss points, was introduced. In this paper, a different approach for improvement of stresses based on the satisfaction of equilibrium equations by taking into consideration of two elasticity problems is followed and the effect of the number of the Gauss quadrature points is studied. In this approach, the equilibrium equations are satisfied for each patch of the isogeometric analysis model and it has been shown that the recovered stresses are more accurate than the previous method where the super-convergent properties were used. To demonstrate the performance and efficiency of the method a couple of elasticity problems are considered and the obtained results are compared with the previous method and exact solutions. The results indicate that the suggested method can be employed for error estimation and stress recovery in the isogeometrical analysis method.

Key Words Isogeometric Analysis, Error Estimation, Stress Recovery, Equilibrium Equations.

*تاریخ دریافت مقاله ۹۱/۴/۱۲ و تاریخ پذیرش آن ۹۳/۴/۸ می‌باشد.

(۱) نویسندهٔ مسئول: استادیار، گروه عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد شاهرود، شاهرود، ایران. ahmad.ganjali@yahoo.com

(۲) استاد، گروه مکانیک، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.

مقدمه

حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار یک سیستم یکی از مهم‌ترین مسائلی است که همواره در زمینه‌های علوم و مهندسی مورد بحث قرار داشته است. در حالت کلی این معادلات پیچیدگی‌های بسیار زیادی دارند و تنها با استفاده از روش‌های عددی قابل حل می‌باشند. در دهه‌های اخیر با توسعهٔ روش‌های مختلف عددی مواجه بوده‌ایم که از جمله مهم‌ترین آنها می‌توان به روش‌های تفاضل محدود، روش اجزای محدود و دسته روش‌های موسوم به روش‌های بدون مش اشاره کرد. از میان این روش‌ها، روش اجزای محدود به‌عنوان روشی قدرتمند در بسیاری از علوم مهندسی شناخته شده و توسعه یافته است. این روش در دهه ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ شکل گرفت و امروزه با کاهش عیوب و ادغام آن با روش‌های تفاضل محدود و بدون مش بسیاری از مشکلات دانشمندان مکانیک محاسباتی را مرتفع ساخته است. اما، علی‌رغم این پیشرفت قابل ملاحظه هنوز هم نمی‌توان روشی را یافت که بتوان آنرا کامل و بدون نقص نامید. از جمله این نواقص و مشکلات می‌توان به ضعف در تولید دقیق شکل مسائلی با هندسهٔ پیچیده، ضعف در مدل‌سازی دقیق مسائلی با تغییرات شدید در خواص مصالح و نیز نیاز به تولید مکرر شبکه المان‌ها در برخی مسائل، نظیر مسائلی که در چارچوب لاگرانژی حل می‌شوند و یا مسائل بهینه‌سازی شکل سازه، اشاره نمود.

تقریباً یک دهه پس از شکل‌گیری روش اجزای محدود، بین سال‌های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰، به‌دلیل توسعهٔ رایانه‌ها پیشرفت‌های چشم‌گیری در علم مدل‌سازی هندسه به‌کمک رایانه (Computer Aided Design) شکل گرفت. واضح است که تحلیل مسائل مهندسی بر مبنای هندسه استوار است و استفاده از این پیشرفت‌ها می‌تواند کمک شایانی به تحلیل مهندسی در رفع نقایص آن نماید. اما به‌دلیل عدم هم‌زمانی پیدایش روش اجزای محدود و روش‌های طراحی به‌کمک رایانه، این اتصال بین تحلیل مهندسی و طراحی به‌کمک رایانه به‌وجود نیامد.

از اولین تلاش‌هایی که برای ورود تکنیک‌های طراحی به‌کمک رایانه در تحلیل مهندسی صورت پذیرفت در سال‌های ۱۹۹۸ تا ۲۰۰٤ و توسط کیگان و همکاران [1,2] و هولیگ و همکاران [3] انجام شد که در آن به‌جای توابع شکل مورد استفاده در اجزای محدود، از توابع پایهٔ اسپلاین استفاده شده بود. در سال ۲۰۰۵ این ایده با استفاده از توابع نربز (بی-اسپلاین‌های نسبی غیریکنواخت (Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS)) که از توسعهٔ توابع اسپلاین به‌دست می‌آیند توسط هیوز و همکارانش تکامل یافت و روش تحلیل ایزوژئومتریک نام گرفت [4]. در این روش ضمن استفاده از خواص توابع پایهٔ اسپلاین و نربز در تعریف دقیق منحنی‌ها، سطوح و احجام، همانند توابع شکل در روش اجزای محدود، از آنها برای درون‌یابی و تقریب‌سازی هم استفاده می‌شود. به‌طور خلاصه از مزایای روش ایزوژئومتریک در مقایسه با دیگر روش‌های عددی می‌توان به مواردی چون، امکان مدل‌سازی دقیق‌تر، دقت قابل ملاحظه در اقناع شرایط مرزی، عدم نیاز به شبکه‌بندی مجدد در مسائلی که مدل هندسی در حین حل دچار تغییر می‌شود، کاهش قابل ملاحظهٔ اندازهٔ دستگاه معادلات، انعطاف‌پذیری و سادگی در مسائل بهبود شبکه و قابلیت استفاده از این روش در حل معادلات دیفرانسیلی که ضرایب آنها خود تابعی متغییر می‌باشند اشاره کرد [5]. در چند سال اخیر، روش ایزوژئومتریک به‌سرعت در زمینه‌های مختلفی هم‌چون دینامیک سیالات، مکانیک سازه‌ها و یا الکترومغناطیس توسعه داده شده است. هم‌چنین در این زمینه کتابی به چاپ رسیده است که برای مطالعهٔ بیشتر می‌توان به آن مراجعه کرد [6].

خطا بخش جدانشدنی تحلیل‌های عددی به‌شمار می‌رود و همواره باعث نگرانی محققان در قابلیت

اعتماد نتایج بوده است. استفاده از روش برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش در تحلیل ایزژئومتریک (Stress Recovery in Isogeometric analysis(SRI)) اولین بار توسط حسنی و همکاران مورد استفاده قرار گرفت [1]. اساس روش SRI، مشابه روش SPR در اجزای محدود، برگرفته از خاصیت فوق همگرایی تنش در نقاط انتگرال‌گیری گوسی است. در این روش با استفاده از نقاط فوق هم‌گرای گوسی برای هر مؤلفهٔ تنش، یک سطح بهبود یافته تشکیل می‌شود که برای برآورد خطای ایزوژئومتریک مورد استفاده قرار می‌گیرد [5]. بعد از آن توسط همان محققان، یک روش بر پایهٔ ارضای معادلات تعادل معرفی شد که باعث برآورد بهتری از خطا در داخل و نواحی مرزی دامنهٔ تحلیل ایزوژئومتریک شد و کارایی آن در برآورد خطای سه مسألهٔ الاستیسیته مورد ارزیابی قرار گرفت [۷]. در این پژوهش ضمن بررسی عملکرد این روش در برآورد خطای دو مسألهٔ نمونه با شرایط انحنا در مرزهای هندسی، به بررسی تأثیر تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوسی در کارایی این برآوردکنندهٔ خطا پرداخته شده است.

تیر طرهٔ دایره‌ای شکل و صفحهٔ دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری دو مثال حل شده در این پژوهش می‌باشند. به‌منظور بررسی تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوسی نیز، نسبت نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی کل دامنه (شاخص تأثیر) با چهار، نه، شانزده، بیست و پنج و سی و شش نقطهٔ گوسی برای دو مثال حل شده در این پژوهش و سه مثال مرجع [۷] مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج به‌دست آمده از دو مثال حل شده در این پژوهش نیز نشان می‌دهد که برآورد خطا با استفاده از این روش نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا، با دقت بهتری صورت می‌پذیرد.

برآورد خطا در اجزای محدود

به‌منظور آشنایی با برخی از روش‌های تخمین خطای تحلیل‌های عددی در این بخش به معرفی تعدادی از این روش‌ها در برآورد خطای تحلیل اجزای محدود پرداخته می‌شود.

از اولین مقاله‌هایی که در آن یک روش عمومی از تخمین خطا بیان شده است، مقاله‌های ریچاردسون می‌باشد که در سال ۱۹۱۰ نوشته شده است. روش ریچاردسون در تخمین خطا از این حقیقت پیروی می‌کند که خطا در هر طرحی از تفاوت محدود، معمولاً به اندازهٔ مش‌های مورد استفاده بستگی دارد [8]. کار اصلی در تخمین خطا در سال ۱۹۷۸ و توسط بابوشکا و رینبولت آغاز شد [9, 10]. روش آنها که روش باقیمانده‌ای نام گرفت بر این اساس بود که با قرار دادن حل حاصل از روش اجزای محدود در معادلهٔ دیفرانسیل اولیه و محاسبهٔ ماندهٔ آن و نیز محاسبهٔ پرش میدان گرادیان در لبهٔ المان‌ها، تخمینی از خطای حل اجزای محدود به‌دست می‌آید [9]. دستهٔ دیگر از روش‌های برآورد خطا، روش‌های بازیافت تنش می‌باشد که طبق تحقیقاتی که بابوشکا در سال ۱۹۹٤ توسط آزمون وصلهٔ خود انجام داد، پی برده شد که این روش‌ها در مقایسه با روش‌های باقیمانده‌ای از دقت و هم‌گرایی بهتری برخوردار می‌باشند [11]. به‌طور کلی بازیافت تنش روشی به‌منظور بالا بردن دقت، و پیوسته و هموار نمودن میدان تنش یا گرادیان میدان به‌دست آمده از حل اجزای محدود است. در این روش با استفاده از حل روش اجزای محدود، یک جواب نزدیک به حل دقیق یا تحلیلی در هر گره یا در نقاط دل‌خواه روی دامنه محاسبه شده است که دقت بالاتری نسبت به حل اولیهٔ اجزای محدود داشته است. به‌طور کلی این میدان تنش بهبود یافته، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma^* = N\overline{\sigma}^* \qquad (۱)$$

که در آن $\overline{\sigma}^*$ مقادیر گرهی این میدان و N توابع شکل مورد استفاده در المان‌ها است. با استفاده از این

میدان بهبود یافته، خطای بازیافت به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e^*_\sigma = \sigma^* - \sigma_h \tag{۲}$$

که در رابطهٔ بالا σ_h تنش ناشی از اجزای محدود می‌باشد. روش‌های متعددی برای بازیافت تنش از حل اجزای محدود وجود دارد که از جمله ابتدایی ترین آنها می‌توان به روش میانگین گیری که توسط هینتن و کمپبل [12] در سال ۱۹۷٤ و روش تصویر L_2 که توسط اودن و براچلی [13] در سال ۱۹۷۱ به‌کار برده شده است اشاره کرد. در سال ۱۹۹۲روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق هم‌گرا SPR توسط زینکویچ و زو [14] ابداع شد و گام بسیار بلندی در بازیافت تنش برداشته شد. امروزه این روش به‌عنوان یکی از بهترین و مؤثرترین روش‌ها برای برآورد خطا در مسائل مهندسی به‌کار می‌رود. اساس این روش برمبنای استفاده از نقاطی به نام نقاط فوق هم‌گرا است که در آنها تنش به‌دست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط از دقت بیشتری برخوردار می‌باشد. در این روش با برازش یک میدان به‌صورت چند جمله‌ای با ضرایب نامعین بر روی گرادیان حاصل از روش اجزای محدود روی گروه المان‌های متصل به هر گره (ناحیه)، میدان گرادیان بهبود یافته تعیین می‌شود. این میدان به‌صورت زیر فرض می‌گردد:

$$\sigma^*_p = Pa \tag{۳}$$

در رابطهٔ فوق σ^*_p، تنش بهبود یافته، P مجموعهٔ تک جمله‌ای‌های حداکثر هم درجه با توابع شکل المان و **a** مقادیر ثابت مجهول هستند. با کمینه کردن تابع (٤) مقادیر مجهول مطابق رابطهٔ (٥) به‌دست می‌آید [14].

$$\begin{aligned} F(a) &= \sum_{i=1}^{n} (\sigma_h(x_i, y_i) - \sigma^*_p(x_i, y_i))^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\sigma_h(x_i, y_i) - p(x_i, y_i)a)^2 \end{aligned} \tag{٤}$$

$$a = A^{-1}b \tag{٥}$$

در رابطهٔ (٥)، A و b به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A = \sum_{i=1}^{n} P^T(x_i, y_i) P(x_i, y_i) \tag{٦}$$

$$b = \sum_{i=1}^{n} P^T(x_i, y_i) \sigma_h(x_i, y_i) \tag{۷}$$

در این روابط، $\boldsymbol{\sigma_h}$ تنش به‌دست آمده از روش اجزای محدود، x_i و y_i مختصات نقاط فوق هم‌گرا یا نقاط بهینهٔ تنش در هر ناحیه و n تعداد المان‌های موجود در هر ناحیه است.

بعد از آن نیز تکنیک‌های بسیار دیگری توسط محققین ابداع شد که در هر یک به‌نوعی به بهبود روش SPR پرداخته می‌شود. بدین منظور استفاده از قید معادلات تعادل برای بهبود کارایی روش SPR دنبال شد [15-21]. با توجه به عدم ارضای معادلات تعادل توسط تنش بازیافتی به‌دست آمده از روش SPR به‌ویژه در نزدیک مرزها، در این روش‌ها با استفاده از قید معادلات تعادل سعی بر بهبود کارایی برآورد کنندهٔ خطا شده است.

فرمول‌بندی تحلیل ایزوژئومتریک

به‌طور کلی در روش ایزوژئومتریک، مقدار مجهول مسأله در حالت دوبعدی، (به‌طور مثال مؤلفهٔ تغییرمکان جهت x) به‌عنوان یک سطح نربز، طوری تعیین می‌شود که ارتفاع سطح تشکیل شده از تراز مبنا در هر نقطه از دامنه، بیان کنندهٔ مقدار مجهول مسأله در آن مکان باشد. در مسائل تنش و کرنش مسطح، اگر نقاط کنترلی را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که مؤلفه‌های اول و دوم مختصات این نقاط، (P_x, P_y)، بتوانند هندسه مسأله را در صفحهٔ xy برآورد کنند، در این صورت مؤلفهٔ سوم مختصات این نقاط را طوری محاسبه می‌کنیم که درون‌یابی بین این نقاط به‌وسیلهٔ توابع پایه‌ای نربز نشان

دهندهٔ تغییرمکان آن نقطه باشد. در حقیقت می‌توان رویه‌ای تشکیل داد که تصویر آن روی صفحهٔ xy نشان‌دهندهٔ هندسهٔ مسأله و ارتفاع رویه در هر نقطه نسبت به صفحهٔ xy نشان‌دهندهٔ تغییرمکان آن نقطه باشد. بنابراین اگر تغییرمکان در جهت x و y را به‌ترتیب با u و v نشان دهیم، می‌توان تغییرمکان هر نقطه در داخل زیردامنهٔ نربز (ناحیه) را به‌صورت زیر از روی نقاط کنترلی مربوط درون‌یابی کرد.

$$\mathbf{u} \approx \bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} R_{i,j}(\xi,\eta)\mathbf{P}_{u\,i,j} \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} R_{i,j}(\xi,\eta)\mathbf{P}_{v\,i,j} \end{Bmatrix} \qquad (۸)$$

در رابطهٔ بالا $P_{i,j}$ها نمایشگر بردار مؤلفه‌های سوم مختصات نقاط کنترلی نربز، $R_{i,j}$ توابع پایه‌ای نربز و m و n تعداد نقاط کنترلی در جهت‌های x و y می‌باشند.

با توجه به رابطهٔ (۸) مشاهده می‌شود که تنها پارامتر مجهول برای تعیین سطح تغییرمکان در جهت x و y، بردار P می‌باشد. محدودیتی که بردار مؤلفه‌های سوم مختصات نقاط کنترلی نربز را مشخص می‌کند، ارضای معادلهٔ دیفرانسیل تعادل در فضای تأثیر هر المان نربز تحلیل ایزوژئومتریک است؛ که در نهایت منجر به تشکیل معادلهٔ (۹) می‌شود.

$$KP = F \qquad (۹)$$

که در آن K ماتریس ضرایب (ماتریس سختی)، P مجهولات مسأله (مختصهٔ سوم نقاط کنترلی) و F نیروهای خارجی وارد بر دامنه می‌باشند. حال با گسسته‌سازی دامنه، K و F به‌ترتیب از گردآوری ماتریس سختی و بردار نیروی هر المان از فضای پارامتری، مطابق با رابطهٔ (۱۰) ساخته می‌شوند.

$$K_e = \int_{\Omega_e} B^T (DB)\, d\Omega \;; \quad F_e = \int_{\Omega_e} R^T b\, d\Omega + \int_{\Gamma_{t_e}} R^T t\, d\Gamma \qquad (۱۰)$$

و در نهایت با حل معادلهٔ (۹) و مشخص شدن بردار P می‌توان مؤلفه‌های کرنش و تنش را به‌صورت زیر به‌دست آورد.

$$\varepsilon = BP \;;\; \sigma = D\varepsilon \qquad (۱۱)$$

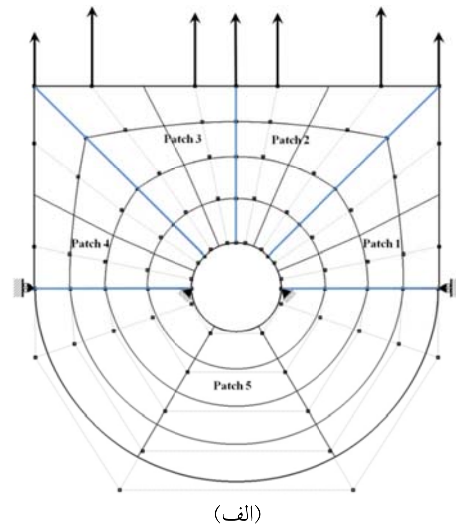
تشریح روش بازیافت تنش با استفاده از قید معادلات تعادل

به‌طور کلی در این روش، مشابه روش‌هایی که به‌منظور بهبود میدان تنش اجزای محدود در مراجع [18, 21] ارائه شده است، با معادل قرار دادن نیروهای عمل کننده بر یک ناحیه از فضای محاسباتی به‌دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک و میدان تنش بازیافتی، می‌توان برای هر مؤلفه تنش به یک سطح تنش بهبود یافته دست یافت.

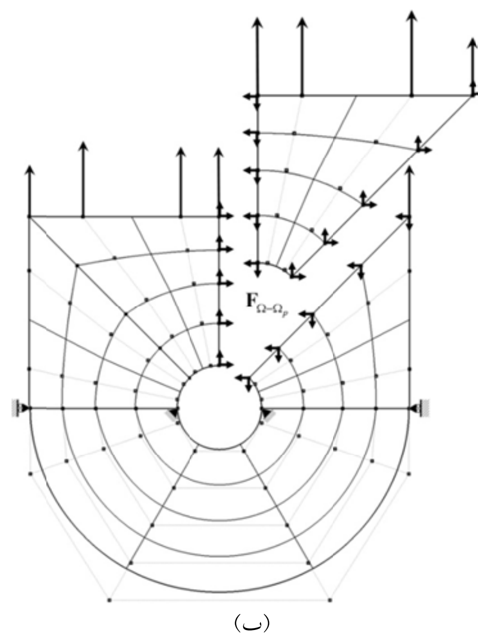
همان‌طور که در بخش قبل بیان شد، رابطه‌سازی تحلیل ایزوژئومتریک و نحوهٔ به‌دست آمدن سطح جابه‌جایی به‌گونه‌ای است که با ارضای معادلهٔ تعادل در فضای تأثیر هر یک از المان‌های تحلیل ایزوژئومتریک، تعادل در کل دامنهٔ مدل‌سازی شده برقرار می‌شود. در صورت وجود تعادل در کل دامنه، هر ناحیهٔ نربز از دامنهٔ مدل‌سازی شده در تحلیل ایزوژئومتریک نیز در شرایط تعادل قرار دارد. به این ترتیب می‌توان فرم ضعیف معادلهٔ دیفرانسیل تعادل را برای یک ناحیهٔ مجزا از کل دامنهٔ مدل‌سازی شده در تحلیل ایزوژئومتریک، به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\int_{\Omega_p} B^T (DBP)\, d\Omega - \int_{\Omega_p} R^T b\, d\Omega - \int_{\Gamma_t^p} R^T t\, d\Gamma + F_{\Omega-\Omega_p} = 0 \qquad (۱۲)$$

که در آن $F_{\Omega-\Omega_p}$، مطابق شکل (۱)، نیروهای عمل و عکس‌العمل بین ناحیهٔ جدا شده و کل دامنهٔ مدل‌سازی شده در تحلیل ایزوژئومتریک می‌باشد.



(الف)



(ب)

شکل ۱ مدل‌سازی یک مسألهٔ دوبعدی در روش ایزوژئومتریک. الف) شبکهٔ نقاط کنترلی، شبکهٔ المان‌ها و شرایط مرزی دامنهٔ مدل‌سازی شده با پنج ناحیه، ب) ناحیهٔ جدا شده و نیروهای وارد بر آن

در صورتی که مطابق رابطهٔ (۱۳)، F_Ω را به‌عنوان نیروهای حجمی و سطحی وارد بر ناحیهٔ جدا شده از کل دامنهٔ مدل‌سازی شده در تحلیل ایزوژئومتریک فرض کنیم، رابطهٔ (۱۲) را می‌توان به‌صورت رابطهٔ (١٤) بیان نمود.

$$F_\Omega = \int_{\Omega_p} R^T b \, d\Omega + \int_{\Gamma_t^p} R^T t \, d\Gamma \qquad (۱۳)$$

$$\int_{\Omega_p} B^T (DBP) \, d\Omega = F_\Omega - F_{\Omega-\Omega_p} \qquad (١٤)$$

حال در صورتی که $f = F_\Omega - F_{\Omega-\Omega_p}$ را به‌عنوان کل نیروهای وارد شده بر ناحیهٔ جدا شده در نظر بگیریم و معلوم فرض کنیم، می‌توان ناحیه جدا شده را به‌عنوان یک سیستم مجزا در نظر گرفت و معادلهٔ دیفرانسیل تعادل را به فرم زیر برای آن بیان نمود.

$$\int_{\Omega_p} B^T (\sigma) \, d\Omega = f = F_\Omega - F_{\Omega-\Omega_p} \qquad (۱۵)$$

که در آن $\boldsymbol{\sigma}$ میدان تنش دقیق حاکم بر مسأله می‌باشد. با مقایسهٔ روابط (۱۵ و ١٤) می‌توان رابطهٔ (١٦) را نتیجه گرفت.

$$\int_{\Omega_p} B^T (\sigma) \, d\Omega = \int_{\Omega_p} B^T (DBP) \, d\Omega \qquad (١٦)$$

رابطهٔ (١٦) محدودیتی است که به‌طور مستقیم بر میدان تنش دقیق حاکم بر مسأله وارد می‌شود. حال میدان تنش حاکم بر مسأله را، همانند سطوح مفروض برای جابه‌جایی، به‌صورت سطوح نربز با مختصهٔ سوم مجهول نقاط کنترلی فرض می‌کنیم. بردار مختصات سوم نقاط کنترلی با استفاده از محدودیت معادلهٔ (١٦) به‌دست خواهد آمد. واضح است که این سطوح تنش بازیافتی نسبت به سطوح تنش به‌دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک دارای دقت بیشتری خواهند بود. زیرا همان‌طور که در معادلهٔ (١٦) مشاهده می‌شود، این سطوح تنش بازیافتی با انتگرال‌گیری مستقیم به‌دست می‌آید و مرتبهٔ آن نسبت به سطوح تنش به‌دست آمده

از تحلیل ایزوژئومتریک که از مشتق‌گیری میدان جابه‌جایی محاسبه می‌شود، بالاتر است.

با توجه به دقیق‌تر بودن سطح تنش بازیافتی نسبت به سطح تنش به‌دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک می‌توان از آن به‌عنوان یک تخمین کنندهٔ بالقوهٔ خطا برای تحلیل ایزوژئومتریک استفاده نمود. روش کار این تخمین کنندهٔ خطا بدین صورت است که با در نظر گرفتن اختلاف بین سطح تنش بازیافتی و سطح تنش به‌دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک برای هر المان، به‌صورت تقریبی به معیاری برای تعیین میزان خطای موجود در آن المان دست پیدا کرد.

در ادامه به‌منظور بررسی کارایی این تخمین کنندهٔ خطا، به مقایسهٔ نرم خطای انرژی تقریبی به‌دست آمده از این روش و روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا و نرم خطای انرژی دقیق برای دو مسألهٔ نمونهٔ الاستیسیته پرداخته شده است.

نرم خطای انرژی

استفاده از معیارهایی مختلف برای تعیین میزان خطا متداول است. یکی از معروف‌ترین معیارهای بیان خطا، معیار خطای انرژی است. طبق تعریف، نرم خطای انرژی دقیق تنش برای یک المان به‌صورت زیر بیان می‌شود [22]:

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} (\sigma - \bar{\sigma})^{T} D^{-1} (\sigma - \bar{\sigma})\, d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۷)$$

در این رابطه σ مقدار دقیق بردار تنش، $\bar{\sigma}$ تنش به‌دست آمده از حل تقریبی، D ماتریس الاستیسیته و Ω دامنه المان می‌باشد. با توجه به این‌که در حالت کلی، جز در مواردی خاص که حل تئوری بعضی از مسائل الاستیسیته موجود می‌باشد، حل دقیق مسأله در دسترس نمی‌باشد، لذا به‌جای استفاده از میزان دقیق تنش از میزان بهبود یافتهٔ آن برای محاسبهٔ نرم خطای انرژی استفاده می‌شود. در این‌صورت نرم خطای انرژی تقریبی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|e\| = \|\bar{e}\| = \left[\int_{\Omega} (\sigma^{*} - \bar{\sigma})^{T} D^{-1} (\sigma^{*} - \bar{\sigma})\, d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۸)$$

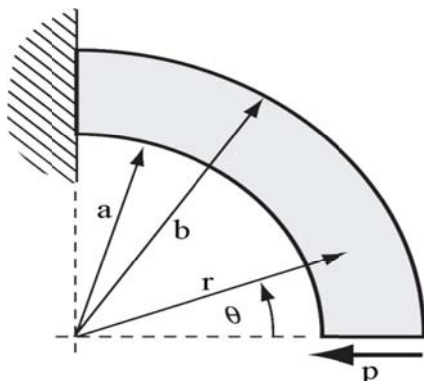
که در اینجا σ^{*} تنش بازیافتی و $\bar{\sigma}$ تنش به‌دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک می‌باشد. در نهایت مجموع نرم خطای انرژی المان‌ها، نرم خطای انرژی کل دامنه را تشکیل می‌دهد.

تیر طرهٔ دایره‌ای شکل

در این بخش به مدل‌سازی یک تیر طرهٔ دایره‌ای شکل الاستیک در شرایط تنش مستوی، توسط تحلیل ایزوژئومتریک و بازیابی تنش‌های آن پرداخته می‌شود (شکل ۲). پارامترهای به‌کار برده شده در مدل‌سازی و تحلیل این مسأله به‌صورت زیر می‌باشد:

$$a = 8 \ , \ b = 10 \ , \ P = 100 \ , \ E = 2\times10^{5} \ , \ \nu = 0.3$$

تنش‌های دقیق این مسأله در دستگاه مختصات قطبی با توجه به پارامترهای تعریف شده در شکل (٤) به‌صورت روابط (۲۱-۱۹) در نظر گرفته شده است [23].



شکل ۲ تیر طرهٔ دایره‌ای شکل

$$\sigma_r = \frac{P}{N}(r + \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2+b^2}{r})\sin\theta \qquad (۱۹)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{N}(3r - \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2+b^2}{r})\sin\theta \qquad (۲۰)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{P}{N}(r + \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2+b^2}{r})\cos\theta \qquad (۲۱)$$

در روابط بالا N به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\mathrm{N} = \mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2 + (\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2)\log(\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}})$$

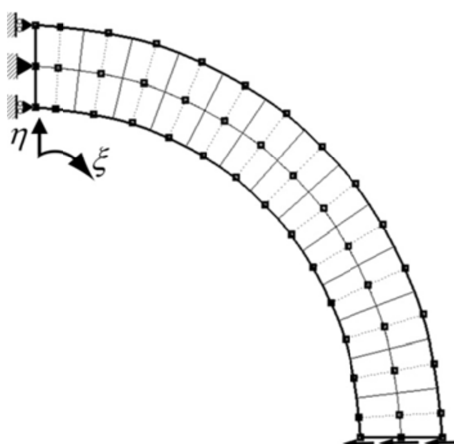
برای مدل‌سازی و تحلیل این تیر به روش ایزوژئومتریک از یک ناحیه و ٤٥ نقطهٔ کنترلی استفاده شده است. هم‌چنین در جهت ξ و η به‌ترتیب از توابع شکل نربز درجه دو و درجه یک و بردارهای گرهی به‌صورت زیر استفاده شده است.

$$\xi = \begin{Bmatrix} 0,0,0,0.08,0.15,0.23,0.31,0.38,0.46, \\ 0.54,0.61,0.69,0.77,0.850.92,1,1,1 \end{Bmatrix},$$
$$\eta = \{0,0,0.5,1,1\}$$

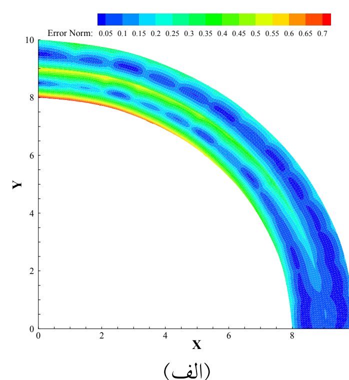
به‌منظور انتگرال‌گیری عددی و نقاط بهینهٔ تنش نیز شانزده نقطهٔ گوسی مورد استفاده قرار گرفته است.

در شکل (۳) آرایش المان‌ها و شبکه نقاط کنترلی به‌همراه شرایط مرزی اعمال شده در مدل‌سازی تیر طرهٔ دایره‌ای نمایش داده شده است. در شکل (٤) نحوهٔ توزیع نرم خطای انرژی دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی به‌دست آمده از روش ارائه شده در این پژوهش (روش جدید) و روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا (روش قدیمی) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نحوهٔ تغییرات نرم خطای تقریبی به‌دست آمده از روش جدید نسبت به روش قدیمی، به تغییرات نرم خطای دقیق نزدیک است که نشان‌دهندهٔ کارایی بهتر تخمین کنندهٔ خطای پیشنهادی نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا است. هم‌چنین شاخص تأثیر به‌دست آمده از روش جدید ۰/۷۵ و از روش قدیمی ۰/۵۹ می‌باشد. که این افزایش در شاخص تأثیر نیز نشان دهنده کارایی بهتر روش پیشنهادی می‌باشد. شاخص تأثیر نسبت مجموع نرم خطای تقریبی به نرم خطای دقیق می‌باشد که نشانگر میزان هم‌گرایی حل به سمت حل واقعی است و معیاری برای بیان دقت محاسبه‌گر خطا به‌شمار می‌رود. هنگامی یک محاسبه‌گر خطا دارای کارایی مناسب است که شاخص تأثیر به سمت یک میل نماید [22].

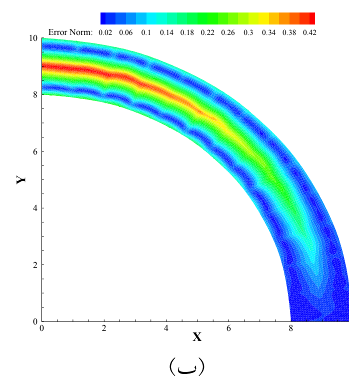
به‌عنوان نمونه در شکل (٥) و در مسیر x=۰/۰٤، نحوهٔ تغییرات تنش σ_y و τ_{xy} به‌دست آمده از حل دقیق، تحلیل ایزوژئومتریک و روش بازیافت تنش قدیمی و جدید ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نحوهٔ تغییرات تنش به‌دست آمده از روش مبتنی بر ارضای معادلات تعادل نسب به روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا، دقیق‌تر است که نشان دهندهٔ کارایی مطلوب روش ارائه شده در این پژوهش در تشکل سطح تنش بهبود یافته می‌باشد.



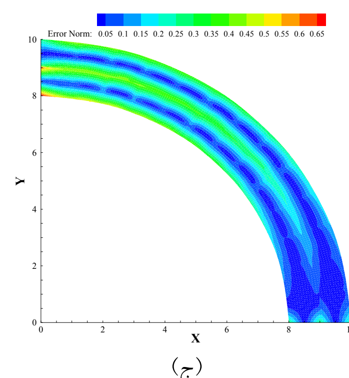
شکل ۳ شبکهٔ نقاط کنترلی، شبکهٔ المان‌ها و شرایط مرزی مدل‌سازی شده در تحلیل ایزوژئومتریک تیر طرهٔ دایره‌ای



(الف)

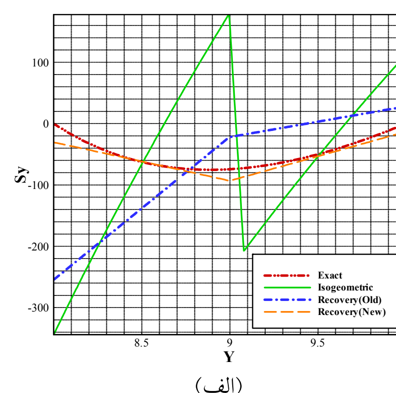


(ب)

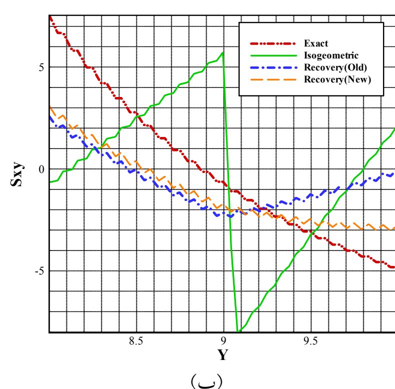


(ج)

شکل ٤ نحوهٔ توزیع ترم خطای انرژی تیر طرهٔ دایره‌ای. الف) نرم خطای انرژی دقیق، ب) نرم خطای انرژی تقریبی (روش قدیمی)، ج) نرم خطای انرژی تقریبی (روش جدید)

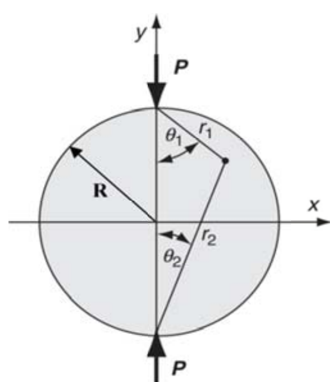


(الف)



(ب)

شکل ٥ نمودار تغییرات تنش تیر طرهٔ دایره‌ای در مسیر x=۰/۰٤ . الف) نمودار تغییرات مؤلفهٔ تنش σ_y ب) نمودار تغییرات مؤلفهٔ تنش τ_{xy}



شکل ٦ صفحهٔ دایره‌ای تحت نیروی فشاری متمرکز

صفحهٔ دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری

در این مثال به بررسی رفتار تخمین کننده‌های خطا، در برآورد خطای به‌دست آمده از تحلیل مسألهٔ دارای یک نقطهٔ تکین با روش ایزوژئومتریک می‌پردازیم. معمولاً مسائل با نقطهٔ تکین، به‌علت بالا بودن خطای آلودگی، مسائل خوبی برای بررسی کارایی تخمین کننده‌های خطا به‌شمار نمی‌روند؛ اما هدف از این مثال، با توجه به این‌که زیر بار متمرکز به‌عنوان یک نقطهٔ تکین، دارای خطای زیادی نسبت به سایر نقاط است، بررسی رفتار تخمین کننده‌های خطا در تعیین میزان نرم خطای انرژی زیر بار متمرکز و توزیع خطا در دیگر نقاط دامنه، مؤثر خواهد بود.

در شکل (٦) مشخصات صفحهٔ دایره‌ای شکل

تحت بار متمرکز قطری مشاهده می‌شود. پارامترهای به‌کار گرفته شده برای تحلیل این مسأله به‌صورت زیر می‌باشد.

$$R=2\ ,\ P=100\ ,\ E=1000\ ,\ \nu=0.3$$

تنش‌های دقیق این مسأله با توجه به پارامترهای تعریف شده در شکل (٦) به‌صورت روابط (٢٤-٢٢) می‌باشد [23].

$$\sigma_x=-\frac{2P}{\pi}\left[\frac{(R-y)x^2}{r_1^4}+\frac{(R+y)x^2}{r_2^4}-\frac{1}{2R}\right] \qquad (٢٢)$$

$$\sigma_y=-\frac{2P}{\pi}\left[\frac{(R-y)^3}{r_1^4}+\frac{(R+y)^3}{r_2^4}-\frac{1}{2R}\right] \qquad (٢٣)$$

$$\tau_{xy}=\frac{2P}{\pi}\left[\frac{(R-y)^2x}{r_1^4}-\frac{(R+y)^2x}{r_2^4}\right] \qquad (٢٤)$$

در روابط بالا r_1 و r_2 به‌صورت زیر می‌باشند.

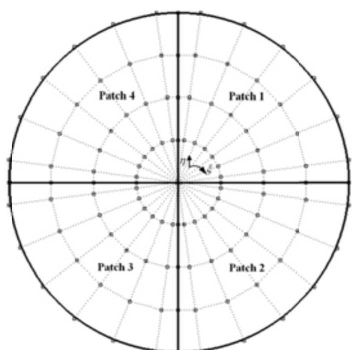
$$r_1=\sqrt{x^2+(R-y)^2}\ ,\ r_2=\sqrt{x^2+(R+y)^2}$$

برای مدل‌سازی و تحلیل این مسأله به روش ایزوژئومتریک از ١٤٠ نقطهٔ کنترلی و چهار ناحیهٔ مشابه به شکل ربع‌دایره استفاده شده است (شکل ٧).

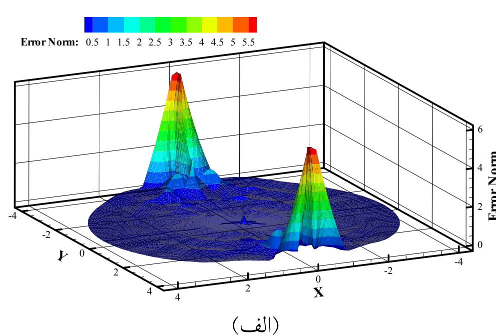
در جهت ξ و η هر ناحیه، به‌ترتیب از توابع شکل نربز درجه دو و درجه یک و بردارهای گرهی به‌صورت زیر استفاده شده است.

$$\xi=\{0,0,0,0.17,0.33,0.5,0.67,0.83,1,1,1\},$$
$$\eta=\{0,0,0.25,0.5,0.75,1,1\}$$

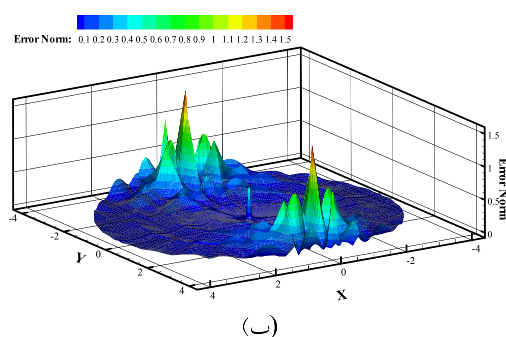
به‌منظور انتگرال‌گیری عددی و نقاط بهینهٔ تنش نیز شانزده نقطهٔ گوسی مورد استفاده قرار گرفته است.



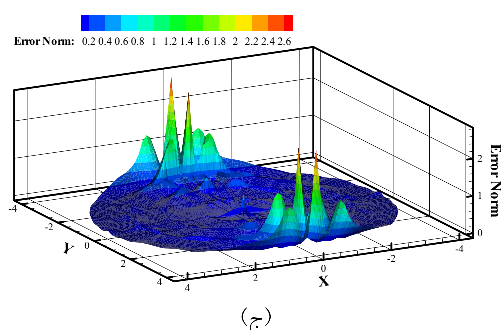
شکل ٧ شبکهٔ نقاط کنترلی در مدل‌سازی صفحهٔ دایره‌ای



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ٨ نحوهٔ توزیع نرم خطای انرژی صفحهٔ دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری. الف) نرم خطای انرژی دقیق، ب) نرم خطای انرژی تقریبی (روش قدیمی)، ج) نرم خطای انرژی تقریبی (روش جدید).

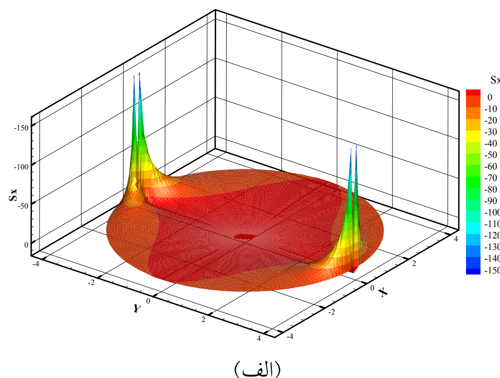
در شکل (۸) نتایج به‌دست آمده از نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی تحلیل صفحهٔ دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، روش تخمین خطای جدید کارایی بهتری نسب به روش قدیمی در برآورد نرم خطا در زیر بار متمرکز و توزیع نرم خطای کل دامنه دارد.

در این مثال نیز شاخص تأثیر تخمین کنندهٔ خطا از مقدار ۰/٤۵ برای روش قدیمی به مقدار ۰/۵۲ در روش جدید افزایش داشته است. که این افزایش شاخص تأثیر نیز نشان دهندهٔ کارایی بهتر روش جدید نسب به روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا خواهد بود.

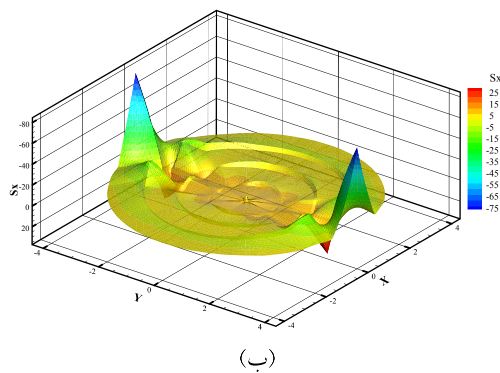
در شکل‌های (۹-۱۱) به مقایسهٔ نحوهٔ توزیع مؤلفه‌ای تنش به‌دست آمده از تحلیل دقیق، تحلیل ایزوژئومتریک و تنش‌های بازیافتی به‌دست آمده از روش ارائه شده در این پژوهش و روش قدیمی مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا پرداخته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در مؤلفه‌های تنش σ_x و σ_y، روش جدید نسبت به روش قدیمی از توزیع تنش مناسب‌تری برخوردار می‌باشد. در مورد توزیع تنش مؤلفه τ_{xy}، هر دو روش توزیع مشابهی دارند اما همان‌طور که مشاهده می‌شود نسبت به توزیع تنش ایزوژئومتریک دقیق‌تر می‌باشند.

بررسی تأثیر تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوسی بر کارایی برآورد کنندهٔ خطا

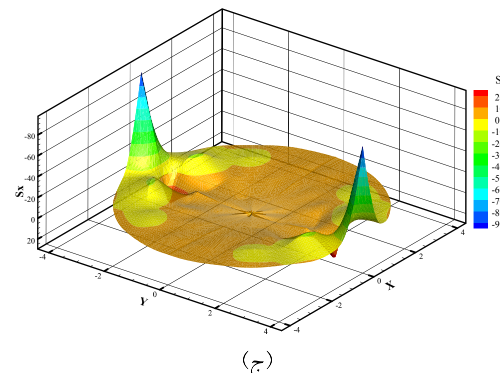
در این بخش به بررسی اثر تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوسی بر کارایی برآورد کنندهٔ خطا بر مبنای ارضای معادلات تعادل در روش ایزوژئومتریک برای دو مثال ارائه شده در این پژوهش و سه مثالی که در مرجع [7] ذکر شده است، پرداخته می‌شود. بدین منظور دامنهٔ حل مسأله با پنج المان نربز با نقاط انتگرال‌گیری مختلف تحلیل شده و شاخص تأثیر برآوردکنندهٔ خطا در هر بخش مورد مقایسه قرار گرفته است. در شکل (۱۲) پنج المان نربز با چهار، نه، شانزده، بیست‌و پنج و سی و شش نقطهٔ گوسی نشان داده شده است. نتایج حاصل از این بررسی در جدول (۱) نشان داده شده است.



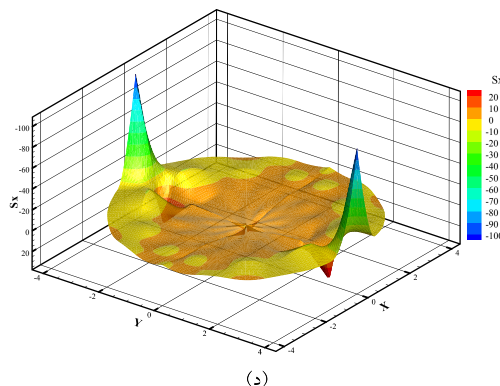
(الف)



(ب)

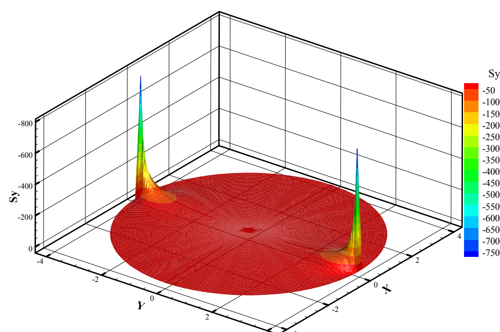


(ج)

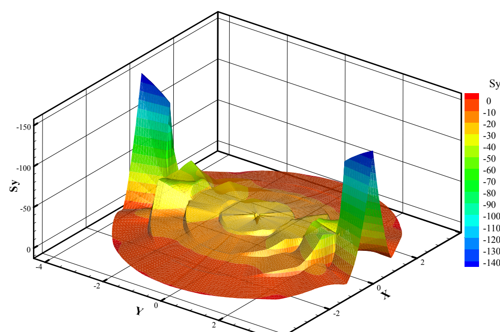


(د)

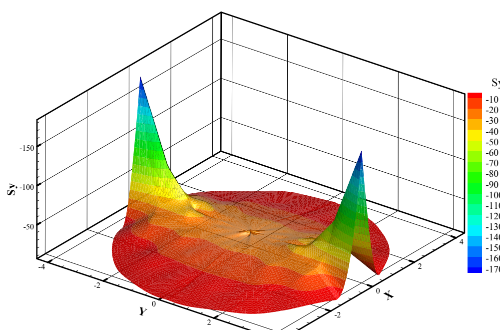
شکل ۹ نحوه توزیع تنش σ_x صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری. الف) تنش دقیق، ب) تنش ایزوژئومتریک، ج) تنش بهبودیافته (روش قدیمی)، د) تنش بهبودیافته (روش جدید).



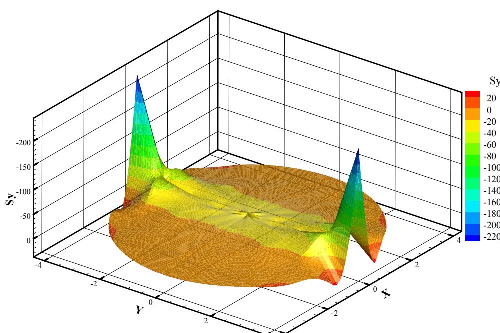
(الف)



(ب)

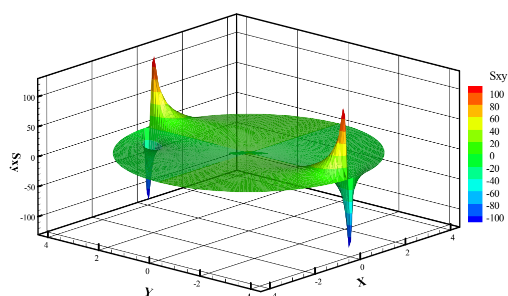


(ج)

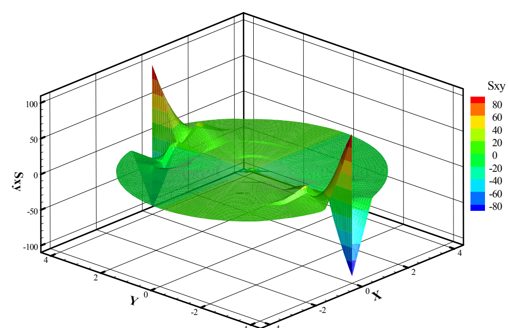


(د)

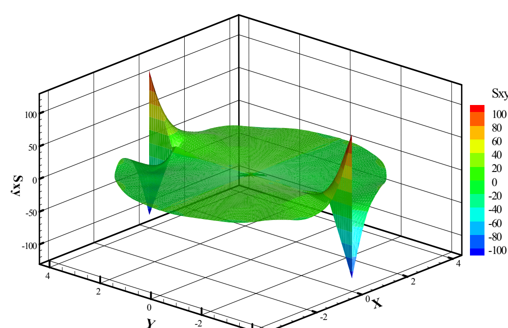
شکل ۱۰ نحوهٔ توزیع تنش σ_y صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری. الف) تنش دقیق، ب) تنش ایزوژئومتریک، ج) تنش بهبودیافته (روش قدیمی)، د) تنش بهبودیافته (روش جدید).



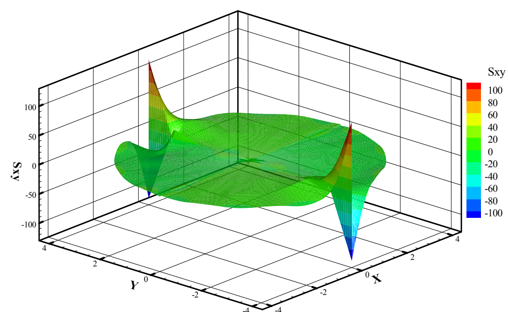
(الف)



(ب)

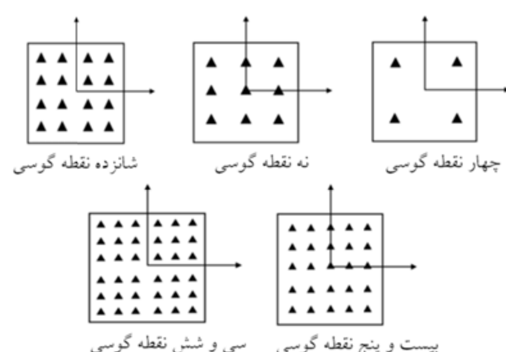


(ج)



(د)

شکل ۱۱ نحوهٔ توزیع تنش τ_{xy} صفحهٔ دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری. الف) تنش دقیق، ب) تنش ایزوژئومتریک، ج) تنش بهبودیافته (روش قدیمی)، د) تنش بهبودیافته (روش جدید).



شکل ۱۲ المان‌های نربز با تعداد نقاط گوسی مختلف در فضای پارامتری

جدول ۱ مقادیر شاخص تأثیر برآوردکنندهٔ خطا برای نقاط گوسی مختلف

تعداد نقاط انتگرال‌گیری به روش گوس	مسائل نمونه				
	تیر طره دایره‌ای شکل، توابع شکل مرتبه $\xi=2$، $\eta=1$	صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری، توابع شکل مرتبه $\xi=2$، $\eta=1$	تیر دوسر مفصل تحت بار گسترده، توابع شکل مرتبه $\xi=1$، $\eta=1$	تیر طره تیموشنکو، توابع شکل مرتبه $\xi=1$، $\eta=1$	صفحه ترکدار تحت کشش، توابع شکل مرتبه $\xi=1$، $\eta=1$
چهار	۰/۷٦	۰/۷۲	۰/۸۹	۰/۹۵	۰/۱۷۷
نه	۰/۷۰	۰/۵۲	۰/۷۸	۰/۸۵	۰/۱۷۵
شانزده	۰/۷۵	۰/۵۲	۰/۸۵	۰/۹۳	۰/۱۸۱
بیست و پنج	۰/۷۲	۰/۵۰	۰/۸۱	۰/۸۸	۰/۱۸۲
سی و شش	۰/۷٤	۰/۵۱	۰/۸۵	۰/۹۲	۰/۱۸٤

مهم‌ترین نتیجه‌ای که از نتایج جدول (۱) استنباط می‌شود این است که تأثیر تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوسی بر کارایی این برآورد کنندهٔ خطا بسیار ناچیز است و مقدار شاخص تأثیر برای تمام نقاط گوسی تقریباً با هم برابر است. همان‌طور که مشاهده می‌شود برای تیر طرهٔ دایره‌شکل و صفحهٔ دایره‌ای شکل تحت بار فشاری که دارای توابع پایهٔ نربز با مرتبهٔ یکسانی می‌باشند تعداد نقاط گوسی مختلفی بیشترین شاخص تأثیر برآورد کنندهٔ خطا را تولید کرده است. این ویژگی برای سه مثال دیگر نیز مشاهده می‌شود. بر این اساس نیز می‌توان بیان نمود که مرتبهٔ توابع شکل مورد استفاده در تحلیل مسائل مختلف در این پژوهش با تعداد نقاط گوسی بهینه که منجر به بالاترین شاخص تأثیر و در نتیجه افزایش کارایی برآورد کنندهٔ خطا می‌شوند، ارتباطی نخواهد داشت.

نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی کارایی روش برآورد خطا مبتنی بر ارضای معادلات تعادل به‌منظور بهبود میدان تنش و برآورد خطای دو مثال نمونه در تحلیل ایزوژئومتریک و هم‌چنین تأثیر تعداد نقاط گوسی مختلف بر کارایی آن پرداخته شد. این برآورد کنندهٔ خطا، دومین روش از روش‌های مبتنی بر بازیافت تنش در برآورد خطای تحلیل ایزوژئومتریک و بر پایهٔ ارضای معادلات تعادل در هر ناحیه می‌باشد. ویژگی بارز این روش عدم نیاز به نقاط فوق هم‌گرا و استفاده

یکسان از توابع شکل نربز در تخمین جابه‌جایی و سطح تنش بهبود یافته است. با توجه به توزیع دقیق‌تر نرم خطای تقریبی حاصل از این روش و نرم خطای تقریبی به‌دست آمده از روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا در دو مسألهٔ حل شده در این پژوهش، هم‌چنین افزایش شاخص تأثیر و نمایش بهتری از مؤلفه‌های تنش بهبود یافتهٔ به‌دست آمده از این روش، می‌توان بیان نمود که روش برآورد خطا مبتنی بر ارضای معادلات تعادل در این دو مثال نمونه نیز از کارایی بهتری نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا برخوردار است و می‌توان از آن به‌عنوان یک راه حل ساده و مهندسی دیگر برای برآورد خطا و بهبود میدان تنش به‌دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک نام برد. هم‌چنین نتایج نشان داد که تعداد مختلف نقاط انتگرال‌گیری به روش گوس تأثیر زیادی بر کارایی این برآوردکنندهٔ خطا نداشته و تقریباً در تمام موارد شاخص تأثیرهای یکسانی را به‌دست می‌دهد.

مراجع

1. Kagan, P., Fischer, A. and Bar-Yoseph, P.Z., "New B-Spline finite element approach for geometrical design and mechanical analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 41, pp. 435-458, (1998).
2. Kagan, P., Fischer, A. and Bar-Yoseph, P.Z., "Mechanically based models: adaptive refinement for B-Spline finite element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 57, pp. 1145-1175, (2003).
3. Hollig, K., Reif, U. and Wipper, J., "Weighted extended B-Spline approximation of dirichlet problems", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 39, pp. 442-462, (2001).
4. Hughes, T.G.R., Cottrell, J.A. and Bazilevs, Y., "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp. 4135–4195, (2005).
5. Hassani, B., Ganjali, A. and Tavakkoli, M., "An isogeometrical approach to error estimation and stress recovery", *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 31, pp. 101-109, (2012).
6. Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R. and Bazilevs, Y., "Isogeometric Analysis: toward integration of CAD and FEA", John Wiley & Sons, (2009).
۷. حسنی، بهروز، گنجعلی، احمد، «استفاده از نیروهای وارد بر وصله‌های تحلیل ایزوژئومتریک جهت محاسبهٔ تنش بهبود یافته و برآورد توزیع خطا»، مجلهٔ مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها، دورهٔ ۲، شمارهٔ ۲، صفحهٔ ۲۹-۱۳، (۱۳۹۱).
8. Richardson, L.F., "The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems", Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, *Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 210, pp. 307–357, (1910).
9. Babuska, I. and Rheinboldt, C., "A-posteriori error estimates for the finite element method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, pp. 1597–1615, (1978).
10. Babuska, I. and Rheinboldt, C., "Adaptive approaches and reliability estimates in finite element analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 17–18, pp. 519–540, (1979).
11. Babuska, I., Strouboulis, T., Upadhyay, C.S. and Gangaraj, S.K., "A model study of the quality of a posteriori estimators for linear elliptic problems error estimation in the interior of patchwise uniform

grids of triangles", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 114, pp. 307–378, (1994).

12. Hinton, E. and Campbell, J., "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Square Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, pp. 461-480, (1974).
13. Oden, T.J. and Brauchli, J., "On the Calculation of Consistent Stress Distribution in Finite Element Approximation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, pp. 317-325, (1971).
14. Zienkiewicz, O.C., Zhu, Z., "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, pp. 1331-1364, (1992).
15. Wiberg, N-E., Abdulwahab, F., "Patch recovery based on superconvergent derivatives and equilibrium", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 2703–2724, (1993).
16. Wiberg, N-E., Abdulwahab, F. and Ziukas, S., "Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 3417–3440, (1994).
17. Blacker, T. and Belytschko, T., "Superconvergent patch recovery with equilibrium and conjoint interpolation enhancements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, pp. 517–536 (1994).
18. Boroomand, B. and Zienkiewicz, O.C., "Recovery by equilibrium in patchs (REP)", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 137-164, (1997).
19. LO, S.H. and LEE, C.K., "On using different recovery procedures for the construction of smoothed stress in finite element method", *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 43, 1223-1252, (1998).
20. Rodenas, J.J., Tur, M., Fuenmayor, F.J. and Vercher, A., "Improvement of the superconvergent patch recovery technique by the use of constraint equations: The SPR-C technique", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 70, pp. 705–727, (2007).
21. Payen, D.J. and Bathe, K.J., "The use of nodal point forces to improve element stresses", *Computers and Structures*, Vol. 89, pp. 485–495, (2011).
22. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Zhu., J.Z., "*The Finite Element Method*", 6th edition, Elsevier Butterworth-Heinemann, (2005).
23. Sadd, M.H., "ELASTICITY:Theory*, Applications, and Numerics*", Elsevier Butterworth–Heinemann, (2005).